GUM 2
Merna nesigurnost 4

PROCENA MERNE NESIGURNOSTI

Propagacija merne nesigurnosti

Funkcija modela: $Y = f(X_1, X_2 ...... X_N)$

Funkcija najbolje procenjenih vrednosti merene veličine:

$$y = f(x_1, x_2 .... x_n)$$

Najčešće se koristi uprošćena linearna kombinacija

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$c_i = dy/dx_i$ ***koeficijent osetljivosti***

Koeficijent osetljivosti

i = 1, . . . ,N

$$u_i(y) = |c_i| u(x_i)$$

Merna nesigurnost pridružena merenoj veličini

Koeficijent osetljivosti

Standardna merna nesigurnost pridružena i-toj ulaznoj veličini koja doprinosi u(y)

Koeficijent osetljivosti: predstavlja parcijalni izvod funkcije koja opisuje model merenja (*f*) u odnosu na X_i *za procenjenu ulaznu* x_i

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_1 = x_1 .. X_N = x_N}$$

Funkcija modela, *f*

- predstavlja proceduru merenja i metode evaluacije
- opisuje kako je vrednost izlazne veličine *Y* dobijena iz ulaznih veičina *Xi*
- ima analitički izraz,
- može predstavljati i grupu izraza koji sadrže korekcije i korekcione faktore za uticajne efekte
- može se odrediti i eksperimentalno ili numeričkim eksperimentom.

Evaluacija standardne merne nesigurnosti

- PRETP:
  - Mežurand *Y* se ne meri direktno
  - Određuje se iz *N* drugih veličina $X_1, X_2..X_N$
  - Y *i* X_i *su* u funkcionalnoj zavisnosti *f*

$$Y = f(X_1, X_2, ..X_N) \qquad (1)$$

PRIMER

- Potencijalna razlika *V* je primenjena na krajeve temperaturno zavisnog otpornika otpornosti R_0
- Linearni koeficijent temperaturne zavisnosti α je definisan na temperaturi t_0
- Mežurand je snaga *P* disipirana na otporniku pri temperaturi *t*

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

Ulazne veličine (2 kategorije)

- Veličine čije su vrednosti i merne nesigurnosti određene iz direktnog merenja
  - iz jednog merenja
  - iz niza ponovljenih merenja
  - iz iskustva primenom korekcionih faktora za uticajne veličine
- Veličine čija je vrednost i merna nesigurnost doneta iz spoljašnjih izvora kao što se: rezultati etaloniranja, referentni materijali, literaturni podaci

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

Oblik funkcije modela

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

$$P = (V^2) \times (1/R_0) \times 1/[1+\alpha(t - t_0)]$$

Električna snaga se određuje iz struje i otpornosti ili napona i struje

$$P = f(I,R) = I^2R = UI = f(U,I)$$

Električna otpornost se može odrediti merenjen struje i napona

$$R = f(V,I) = V/I$$

Oblici funkcije modela

$$y = \pi(\alpha x_1 + \delta x_2 + ..)$$

$$y = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

Suma ulaznih veličina

Koeficijent osetljivosti

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i$$

Procenjena izlazna veličina

$$y = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

Kvadrat standardne merne nesigurnosti pridružene y

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 u^2(x_i)$$

Proizvod ulaznih veličina

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = c \prod_{i=1}^{N} X_i^{p_i}$$

Procenjena izlazna veličina

$$y = c \prod_{i=1}^{N} x_i^{p_i}$$

Ako uvedemo zamene:

$$\boxed{w(y) = u(y)/|y|} \qquad \boxed{w(x_i) = u(x_i)/|x_i|}$$

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 w^2(x_i)$$

Modeli etaloniranja

Generički model $Y = f(\boldsymbol{X})$

vektor ulazne veličine

Modeli merenja se mogu klasifikovati u zavisnosti da li:

(1) postoji jedna ili više merenih (izlaznih) veličina tj. da li je izlazna veličina skalar (univarijetet) ili vektor (multivarijetet)
(2) je izlazna veličina dobijena evaluacijom formule (eksplicitni model) ili rešavanjem jednačine (implicitni model)
(3) su ulazne veličine i funkcija realne ili kompleksne

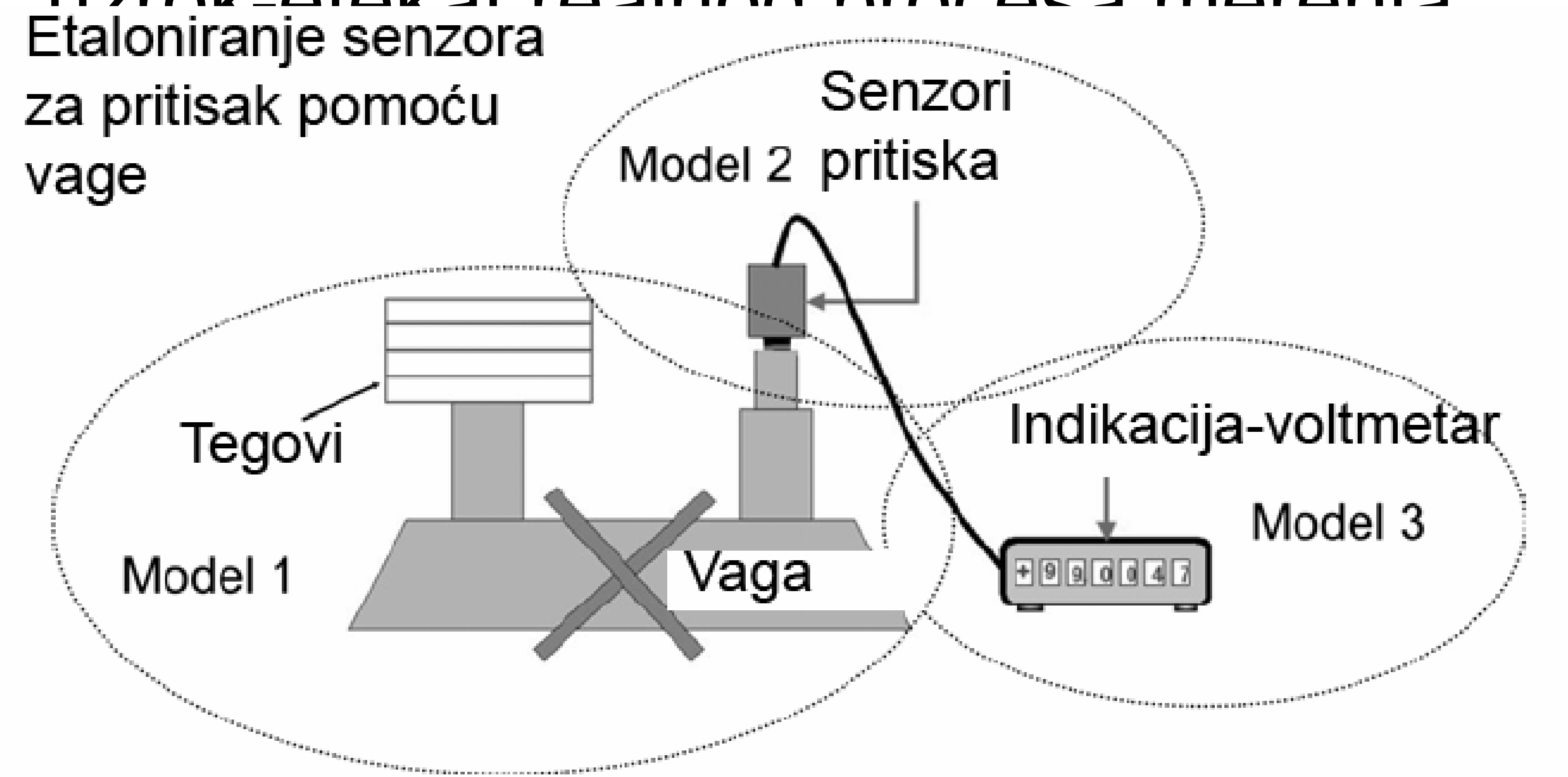
Imajući ovu podelu u vidu postoji 2 x 2 x 2 = 8 kategorija

Kategorizacija modela merenja			
Kategorija	***Izlazna veličina***	***Model***	***Ulazna veličina***
1	Scalar	Eksplicitni	Realna
2	Vektor	Eksplicitni	Realna
3	Skalar	Implicitni	Realna
4	Vektor	Implicitni	Realna
5	Skalar	Eksplicitni	Kompleksna
6	Vektor	Eksplicitni	Kompleksna
7	Skalar	Implicitni	Kompleksna
8	Vektor	Implicitni	Kompleksna

Većina problema etaloniranja spada u najjednostavniju kategoriju 1.

Veliki broj etaloniranja spada u kategoriju 4, rešenje jednačine (linearno ili nelinearno) dobija se metodom ***najmanjih kvadrata***

Jednačina modela se izvodi iz odnosa uzrok-efekat realnog procesa merenja



δW_{IND}

ΔW_S k_B $\delta W_{CPL}(P)$ $\delta W_M(t_a)$ ΔW_{INSTR}

$$k_B = (1 - \rho_a \rho_x^{-1})/(1 - \rho_{1,2} \rho_{8000}^{-1})$$

podmodele.

Procenjene vrednosti se izražavaju malim slovom

- Procenjena vrednost merene veličine (mežuranda) *Y* je *y* i određuje se iz procenjenih vrednosti ulaznih veličina $x_1, x_2, . x_N$ *prema jednačini (1) koja postaje*

$$y = f(x_1, x_2, \ldots . \; x_N) \qquad (2)$$

Evaluacija srednje vrednosti i standardne devijacije *(Tip A)*

- **Opis operacije**
- Primeniti korekcije na izmerene rezultate
- Izračunati srednju vrednost korigovanih rezultata merenja
- Formirati rezidijume

- **Matematička formula**
- Korigovano x_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$Residual = (x_i - \bar{x})$$

Evaluacija srednje vrednosti i standardne devijacije (*Tip A*)

- Opis operacije
- Mat.formula

- Izračunati varijansu *V*

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}$$

- *Pozitivni kvadratni koren varijanse je procenjena standardna devijacija*

$$s_{est} = \sqrt{V}$$

Evaluacija standardne devijacije aritmetičke sredine *(Tip A)*

$$u(x) = \frac{s_{est}}{\sqrt{n'}}$$

Broj merenja

Standardna, kombinovana i proširena merna nesigurnost

Standardna merna nesigurnost

- Standardna merna nesigurnost je jednaka jednoj standardnoj devijaciji pomnoženoj sa odgovarajućim koeficijentom osetljivosti

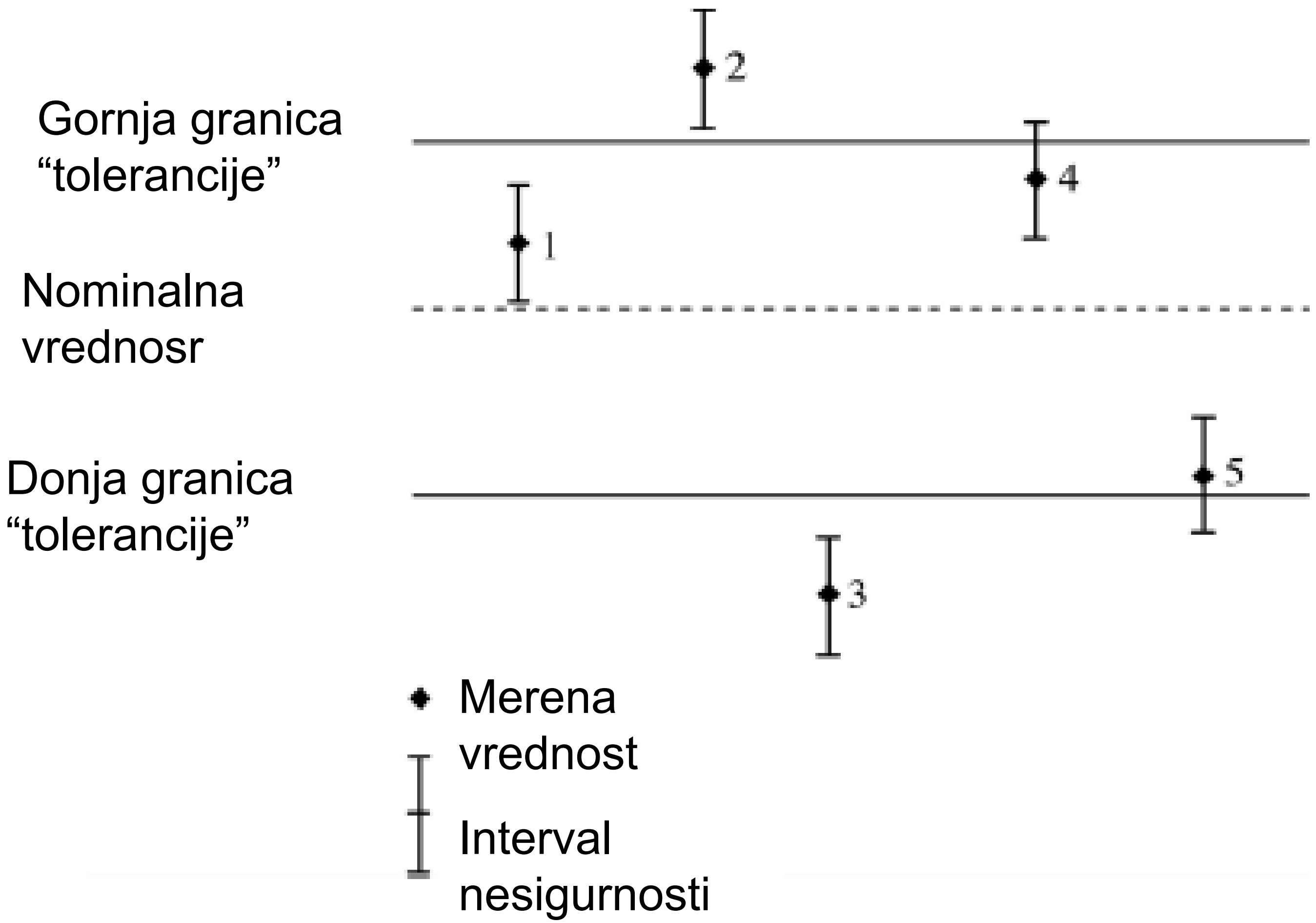
$$u(x_i) = c_i \cdot s_{est}(x_i)$$

Evaluacija merne nesigurnosti Tipa A

$$u_A = s(\bar{x})$$

OPIS OPERACIJE	MATEMATIČKA FORMULA
Primeniti sve korekcije na rezultat merenja	x_i =*korigovani rezultat merenja*
Izračunati srednju vrednost korigovanih rezultata merenja	$\bar{x} = \Sigma^n (x_i)/n$
Izračunati rezidijum za svaki izmereni rezultat	$R = x_i - \bar{x}$
Izračunati Varijansu	$V=(\Sigma^n(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$
Procenjena standardna devijacija serije merenja je pozitivni kvadratni koren varijanse	$s_{est} = \sqrt{V}$
Odrediti standardnu devijaciju aritmetičke sredine	$u(x) = s_{est}/\sqrt{n}$
Standardna merna nesigurnost	$u(x_i) = c_i s_{est}(x_i)$

Procena merne nesigurnosti kada postoje uticajne veličine



Korekcije koje se primenjuju na standardnu devijaciju u zavisnosti od broja merenja

Studentov faktor

- Korekcija T=t/k

n	k = 1	k = 2	k = 3
3	1.32	2.27	-
4	1.20	1.66	3.07
5	1.14	1.44	2.21
6	1.11	1.33	1.84
7	1.09	1.26	1.63
8	1.08	1.22	1.51
9	1.07	1.19	1.43
10	1.06	1.16	1.36
11	1.05	1.14	1.32

- Korekcija T=t/k

n	k = 1	k = 2	k = 3
12	1.05	1.13	1.28
13	1.04	1.12	1.25
14	1.04	1.11	1.23
15	1.04	1.10	1.21
16	1.03	1.09	1.20
17	1.03	1.09	1.18
18	1.03	1.08	1.17
19	1.03	1.08	1.16
20	1.03	1.07	1.15

Primeri:

a) Za n=10 i k=1 korekcioni faktor je 1,06

Standardna merna nesigurnost = 1,06 x procenjena standardna devijacija

b) Za n=5 i k=2, korekcija je 1,44 pa je:

Standardna merna nesigurnost = 1,44 x procenjena standardna devijacija

Proširena merna nesigurnost =2 x standardna merna nesigurnost

Koeficijent osetljivosti, standardna devijacija i merna nesigurnost

- *I = U/R = U x 1/R onda je u(struje)=const x s(napona)*
- *v (brzina) = rastojanje (s) /vreme (t) onda je*
- *u(v)= const x s(t)*
- *Površina kruga (A): 4π r^2 onda je*
- *u(A) = const x 2 x s(r)*

$$If\ y = f(a.x),\ then\ s(y) = \delta f/\delta\,(x)\ .\ a\ .\ s(x)$$

Kombinovana standardna merna nesigurnost

- Uzima se kvadratni koren sume kvadrata svih procenjenih mernih nesigurnosti

$$u_c(y) = [u(x_1)^2 + u(x_2)^2 + \ldots]^{1/2}$$

Proširena merna nesigurnost

- Kombinovanu standardnu mernu nesigurnost pomnožiti faktorom obuhvata *k*

$$U = k \cdot u_c(y)$$

Procena merne nesigurnosti tipa B

- Iz kalibracionog sertifikata
- Iz specifilacije proizvođača
- Merne nesigurnosti konstanti i vrednosti uzetih iz literature
- Prethodni rezultati merenja
- Iskustvo i opšta znanja iz oblasti u kojoj se obavlja merenje

Rezime koraka u proceni merne nesigurnosti

1. Napraviti listu svih faktora koji mogu da utiču na izmerenu vrednost
2. Napraviti preliminarnu procenu vrednosti komponenti mernih nesigurnosti i postaviti granicu za njihov značaj (odbaci one koje nisu od značaja)
3. Sve komponente m.n. Predstaviti na isti način (istom mernom jedinicom ili %)
4. Konvertovati u standardnu nesigurnost pomoću koeficijenta osetljivosti, kad god je moguće

Rezime koraka u proceni merne nesigurnosti

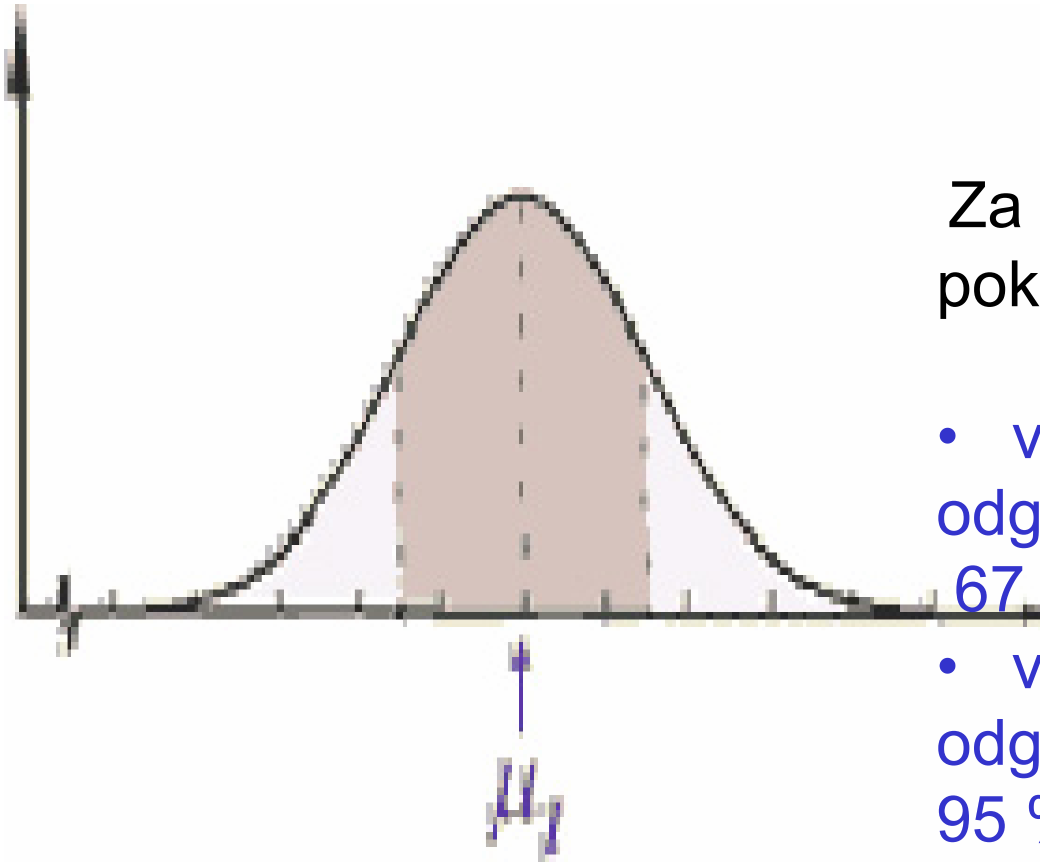
5. Proceniti koje su komponente m.n. nezavisne
6. Dodati nezavisne m.n. Koje se ne procenjuju posebno (iz literature)
7. Izračunati standardnu i kombinovanu m.n.
8. Proceniti proširenu mernu nesigurnost

NAPOMENA: Ukoliko nije drugačije rečeno smatra se da je nivo poverenja 95 % i na osnovu toga bira faktor obuhvata (u zavisnosti od izabrane raspodele verovatnoće)

Izbor raspodele verovatnoće

- **Matematička forma intervala u kome se nalazi prava vrednost fizičke veličine**
- **normalna,**
- **pravougaona (uniformna) i**
- **trougaona**
- **Ulazne veličine:**
- Donja i gornja granica izmerene vrednosti: a_- i a_+
- Najbolje procenjena vrednost: $(a_+ + a_-)/2 = \mu_t$
- Polovina širine intervala: $a = (a_+ - a_-)/2$

Normalna raspodela verovatnoće



Za normalnu raspodelu: ± u pokriva 67 %

- verovatnoća od 1σ odgovara nivo poverenja od 67 %
- verovatnoća od 2σ odgovara nivo poverenja od 95 %
- verovatnoća od 3σ odgovara nivo poverenja od 99,7 %

Normalna raspodela

- Model **"1 od 2"**: Postoji 1 šansa od 2 (verovatnoća 50 %) da merena veličina leži između *a*- i *a*+,

  $$u_j = 1.48\, a$$

- Model **"2 od 3":** Postoje 2 šanse od 3 (verovatnoća 67 %) da merena veličina leži između *a*- i *a*+, $u_j = a$
- Model **"99.73 %":** $\pm 3\sigma$ oko srednje vrednosti odgovaraju verovatnoći od 99,73 %, $u_j = a/3$

U slučaju Gausove raspodele:

Ako smo *prilično sigurni* da granice intervala *L* odgovaraju nivou poverenja od 95 % ili *potpuno sigurni* da granice intervala *L* odgovaraju nivou poverenja od 99 %

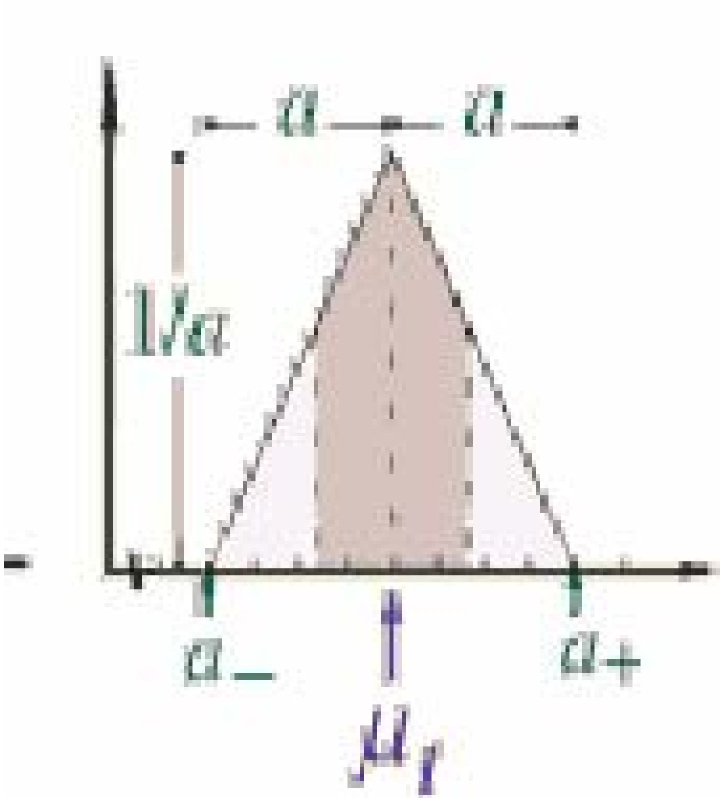
$$u_B = L/k$$

k = 2 za *prilično sigurni*
k = 3 za *potpuno sigurni*
Granice intervala su $\pm L$

Iskazana merna nesigurnost ne mora, po pravilu, da bude multipl standardne devijacije

- Iskaz: iskazana merna nesigurnsot definiše interval koji ima nivo pouzdanosti od 90 %, 95 % ili 99 %.
- U slučaju normalne raspodele multipli su: 1,64; 1,96 i 2,58 respektivno

Trougaona raspodela

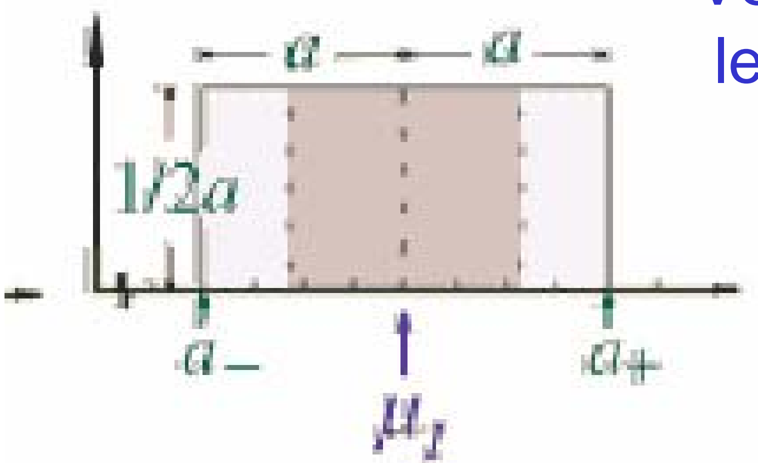


Za trougaonu raspodelu: ± u pokriva 65 %

- Verovatnoća da izmerena vrednost leži u intervalu a_{-} i a_{+}: 100 %.

$u_j = a$

Uniformna (pravougaona) raspodela verovatnoće



Za uniformnu raspodelu ± u pokriva 58 %

Verovatnoća da izmerena vrednost leži u intervalu a_- i a_+,: 100 %.

Raspodela	Parametar	Nivo pouzdanosti [%]	Divizor
Normalna	1 standardna devijacija	67,7	1
Normalna	2 standardne devijacije	95,5	2
Normalna	3 standardne devijacije	99,7	3
Pravougaona	poluopseg	100	$\sqrt{3}$
Kvadratna	poluopseg	100	$\sqrt{6}$

Nivo pouzdanosti i faktor obuhvata

Raspodela	**Nivo pouzdanosti *p* [%]**	**Faktor obuhavata *k***
Normalna	68,27	1,000
	90,00	1,645
	95,00	1,960
	95,45	2,000
	99,00	2,576
	99,73	3,000
Pravougaona	57,74	1,000
	99,00	1,71
	100,00	1,73

Korelisane ulazne veličine

Ukoliko dve ulazne veličine X_i *i* X_k na bilo koji način zavise jedna od druge ***kovarijansa*** pridružena procenjenim vrednostima x_i *i* x_k **ima oblik**

$$u(x_i, x_k) = u(x_i)u(x_k)r(x_i, x_k) \qquad (i \neq k)$$

i dodatno doprinosi mernoj nesigurnosti

Koeficijent korelacije karakteriše Stepen korelacije

$$r(x_i, x_k)$$

Uz uslove: $\left\{ \begin{array}{l} i \neq k \\ |r| \leq 1 \end{array} \right.$

PRETP:

n nezavisnih parova simultano ponovljenih merenja dve veličine *P i Q*

Kovarijansa pridružena aritmetičkim sredinama *p i q*

$$s(\overline{p},\overline{q}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(p_j - \overline{p})(q_j - \overline{q})$$

Iz jednačine za *u* izračunava se *r*

- Za uticajne veličine bilo kog stepena korelacije (iskustvo): jednačina

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$$

postaje

c_i i c_k koeficijenti osetljivosti

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N} c_i c_k u(x_i, x_k)$$

uz $u_i(y) = c_i u(x_i)$

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=i+1}^{N} u_i(y) u_k(y) r(x_i, x_k)$$

Može da ima negativan predznak

Matrica merne nesigurnosti

(matrica kovarijanse, matrica varijanse i kovarijanse)

- **na dijagonali:** kvadrati standardnih nesigurnosti pridruženih komponentama N –dimenzionalnoh vektora.
- **van dijagonale:** kovarijanse pridružene parovima procenjenih vrednosti

varijansa $u^2(x_i)$

$$U_x = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \cdots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix}$$

kovarijansa $u(x_i, x_j)$

u (x_i ,x_j) =0, *X_i X_j su nekorelisane*

Kovarijansa ima oblik

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} c_{1l} c_{2l} u^2(q_l)$$

$$u(y) \cong \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 u^2(x_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 u^2(x_3) + \ldots \right]^{\frac{1}{2}}$$

postaje

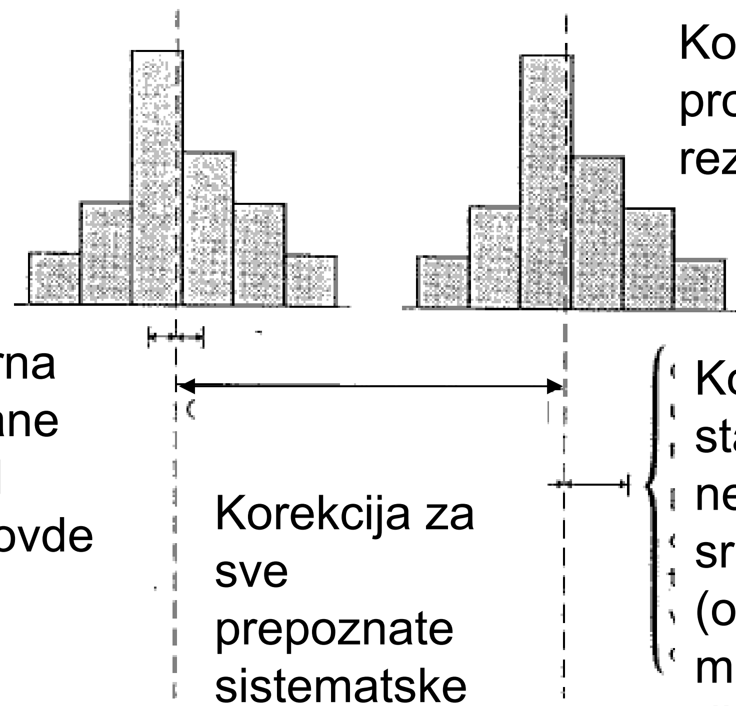
$$u(y) = \left[c_1^2 u^2 \left(x_1 \right) + c_2^2 u^2 \left(x_2 \right) + c_3^2 u^2 \left(x_3 \right) + \ldots \right]^{\frac{1}{2}}$$

Grafička prezentacija vrednosti, greške i merne nesigurnosti

a) Koncept baziran na vrednosti koja se može meriti

aritmetička sredina izmerenih vrednosti

nekorigovana **korigovana**



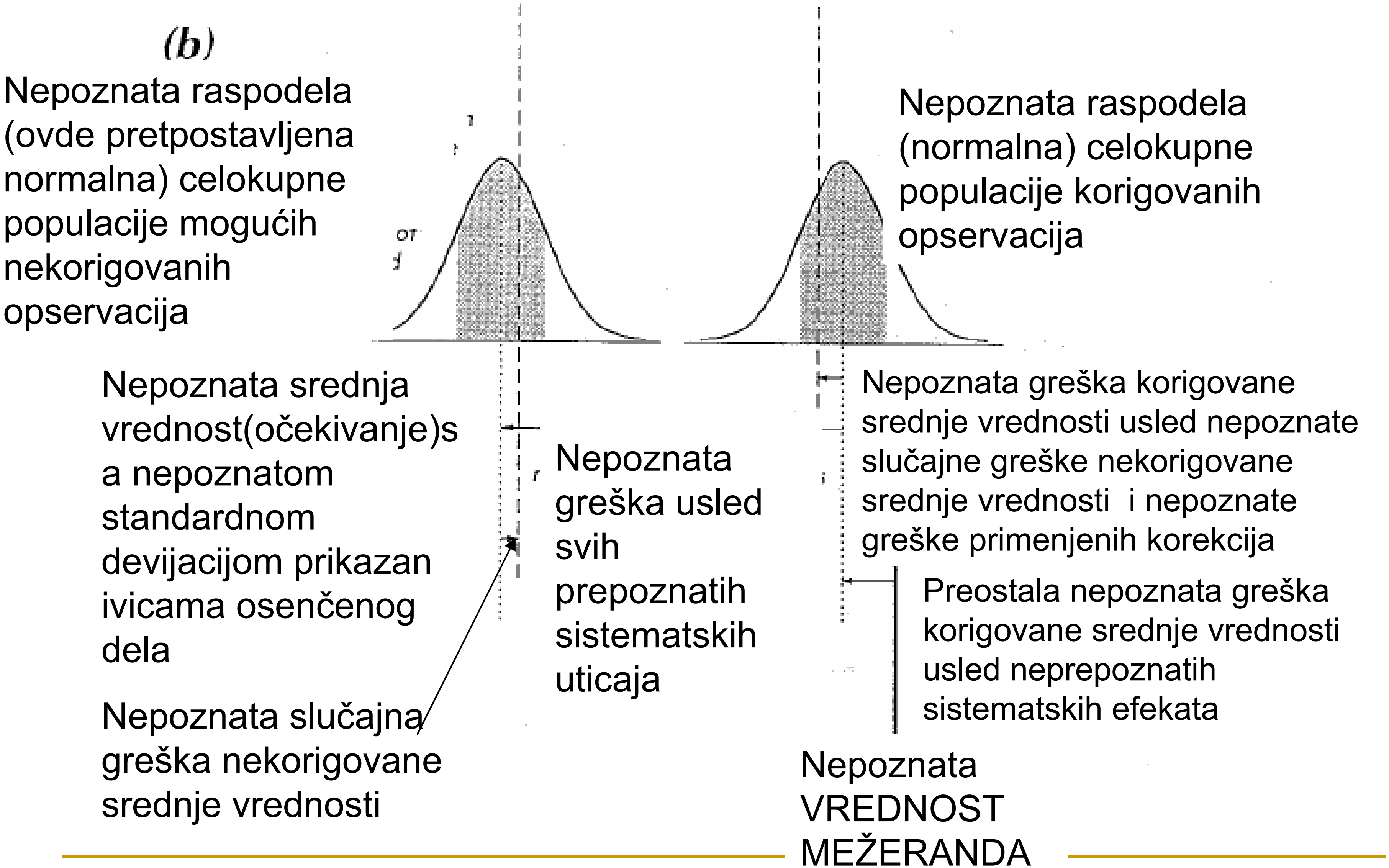
Korigovana vrednost je procenjena mežeranda i rezultata merenja

Standardna merna merna nesigurnost nekorigovane srednje vrednosti usled rasipanja opservacija (ovde prikazana kao interval)

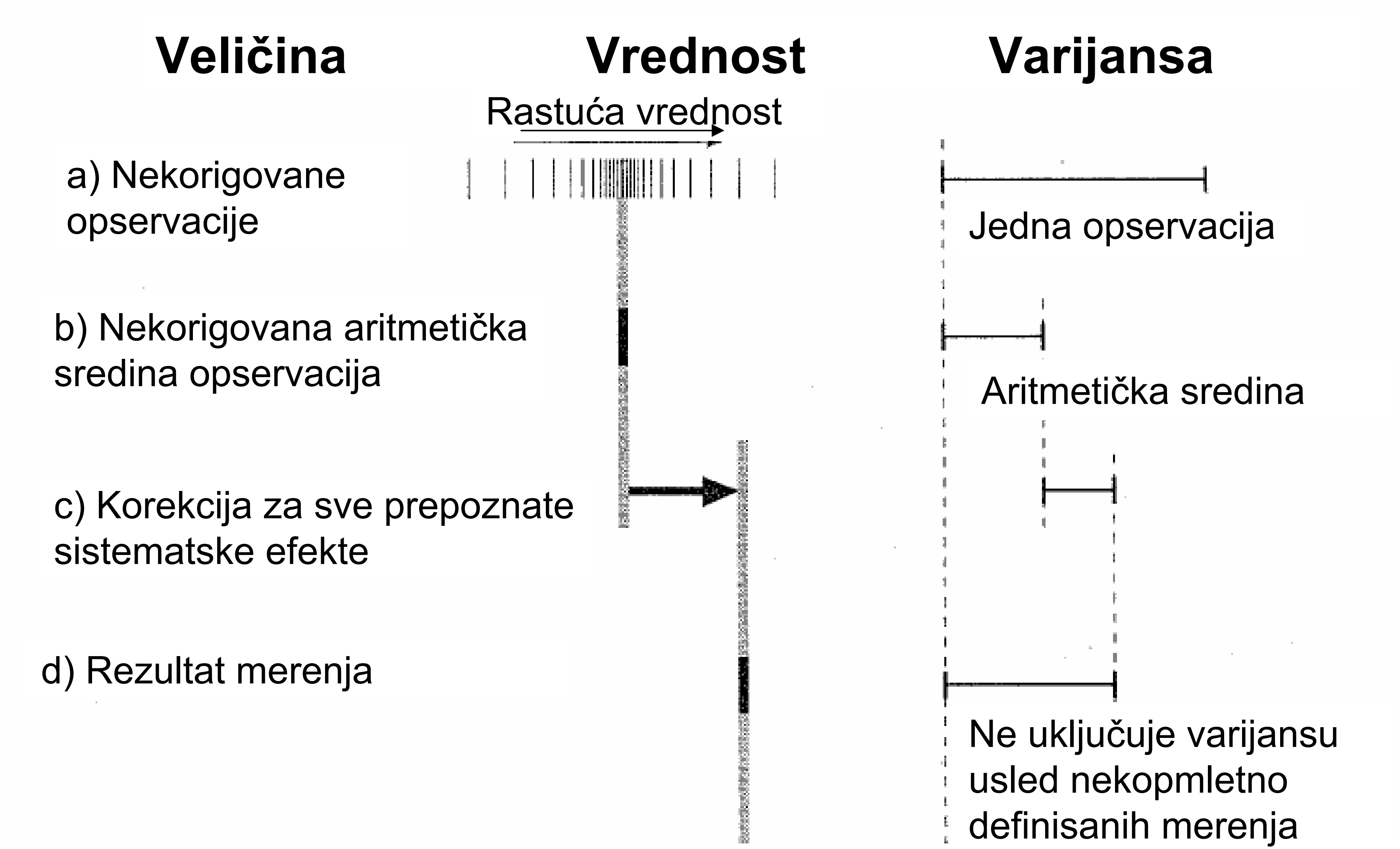
Korekcija za sve prepoznate sistematske uticaje

Kombinovana standardna merna nesigurnost korigovane srednje vrednosti (obuhvata standardnu mernu nesigurnost disperzije opservacija i mernu nesigurnost primenjenih korekcija)

Idealni koncept baziran na nepoznatoj veličini



Grafička prezentacija-nastavak



Grafička prezentacija-nastavak

Veličina **Vrednost** **Varijansa**

d) Rezultat merenja

e) Preostala greška(nepoznata)

f) Nepoznata vrednost mežeranda

g) Vrednosti mežeranda usled nekompletne definicije(nepoznata)

h) Konačni rezultat merenja