

Merna nesigurnost 3

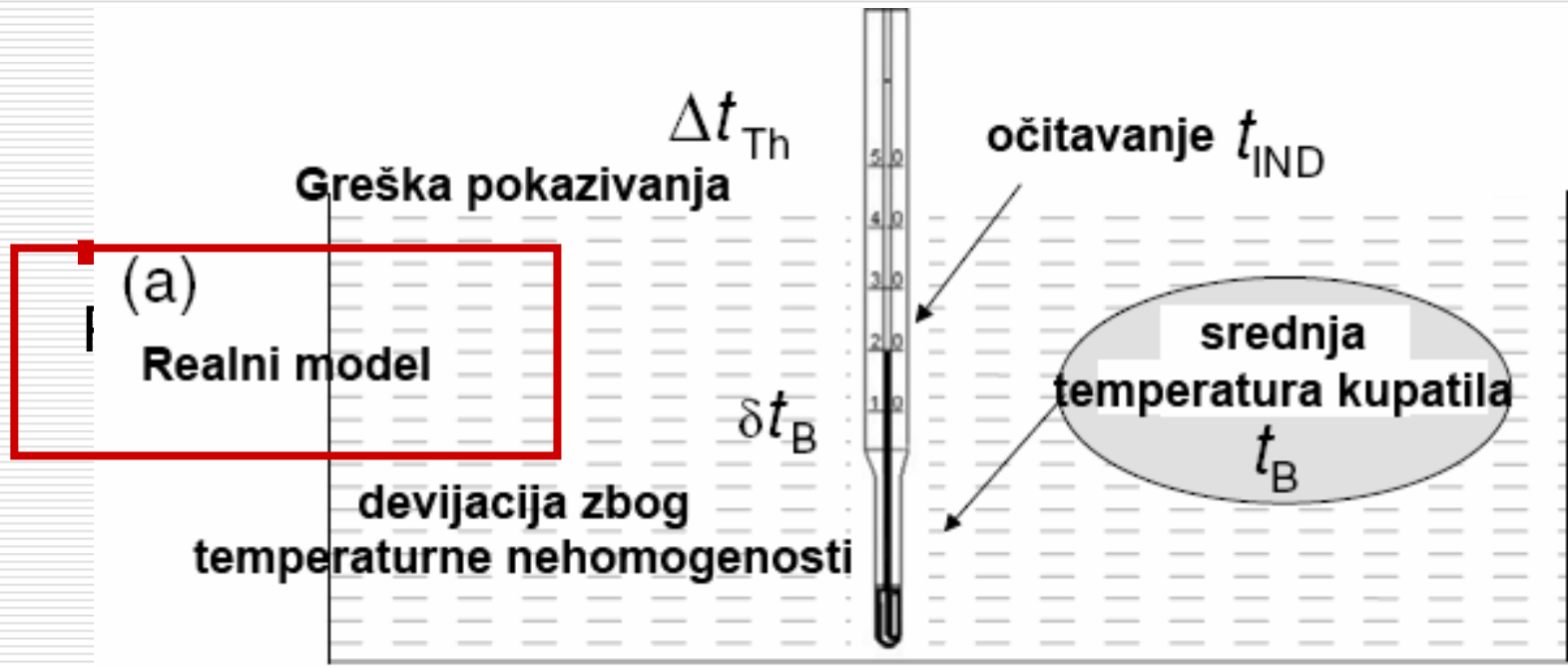
Evaluacija merne nesigurnosti

Sadrži:

- upotrebu modela merenja
- određivanje najbolje procenjene vrednosti **ulaznih veličina**
- određivanje najbolje procenjene vrednosti **izmerene fizičke veličine**

Osnovne ideje za ostavljanje koncepta modelovanja

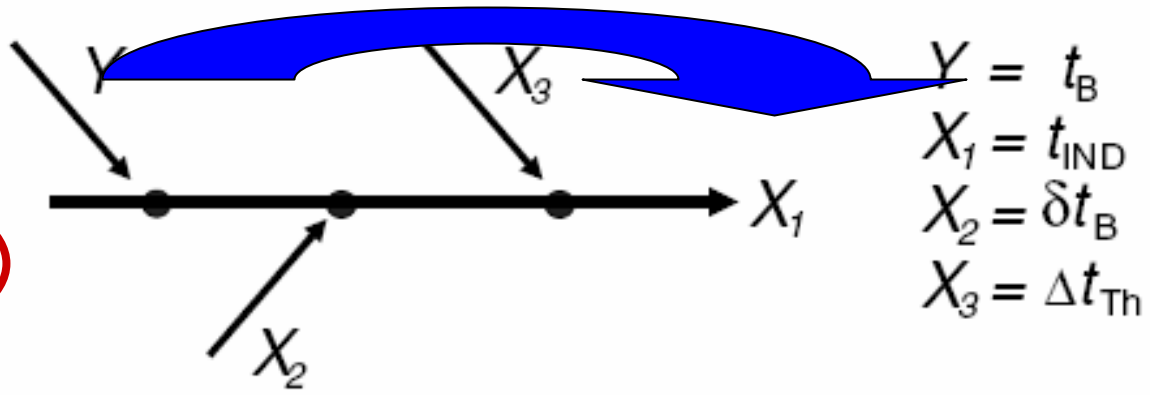
- Najteži zadatak u proceni merne nesigurnosti je modelovanje procesa merenja: uspostavljanje matematičkog odnosa između mežeranda, pokazivanja merila i uticajnih veličina
- Ne postoji generalno prihvaćen koncept modelovanja.
- Model služi da proceni originalni sistem ili da izvede zaključke iz njegovog ponašanja.



(a) Realni model

(b) Grafik odnos uzrok-efekat

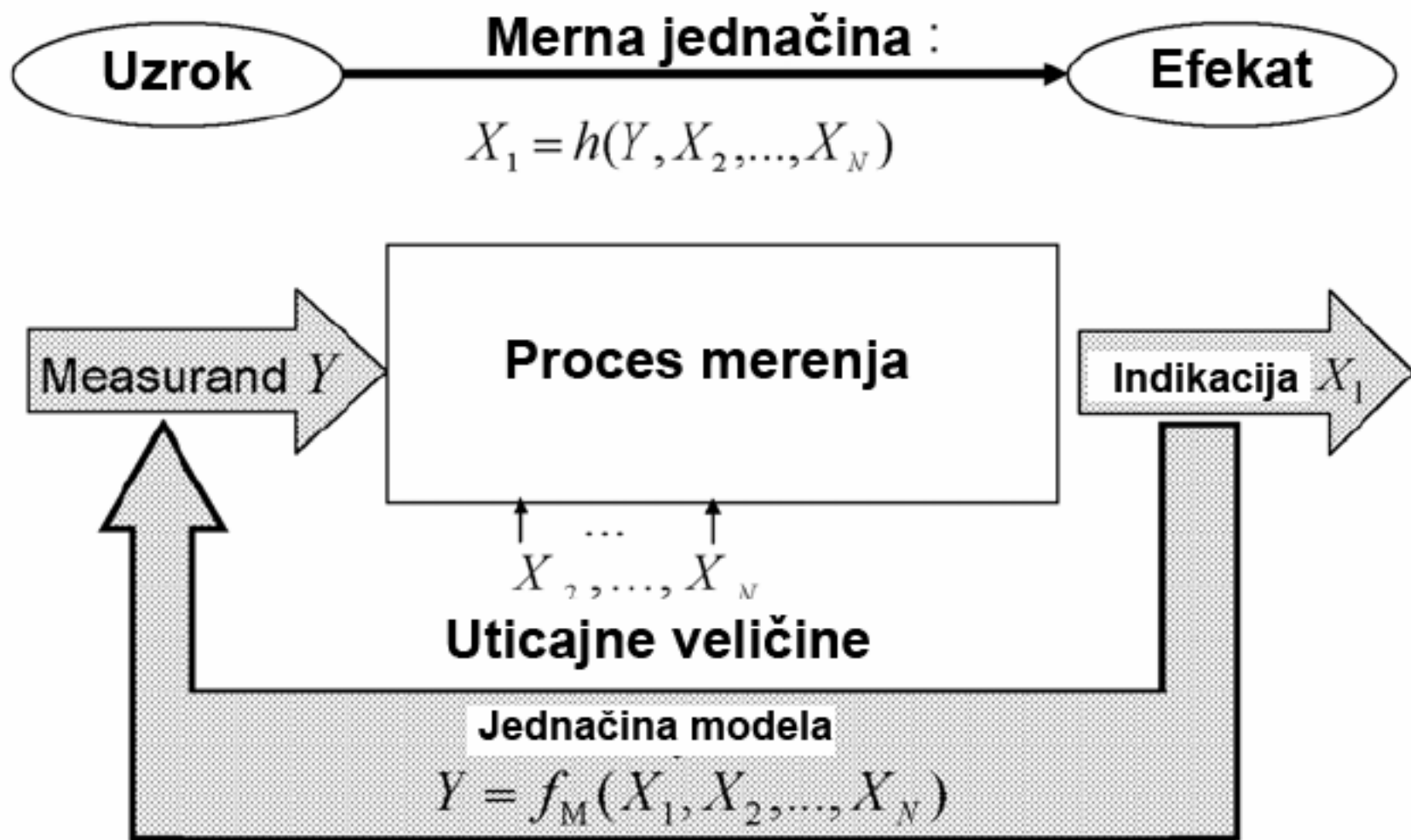
(c) Matematički odnos



$$X_1 = h(Y, X_2, X_3)$$

e

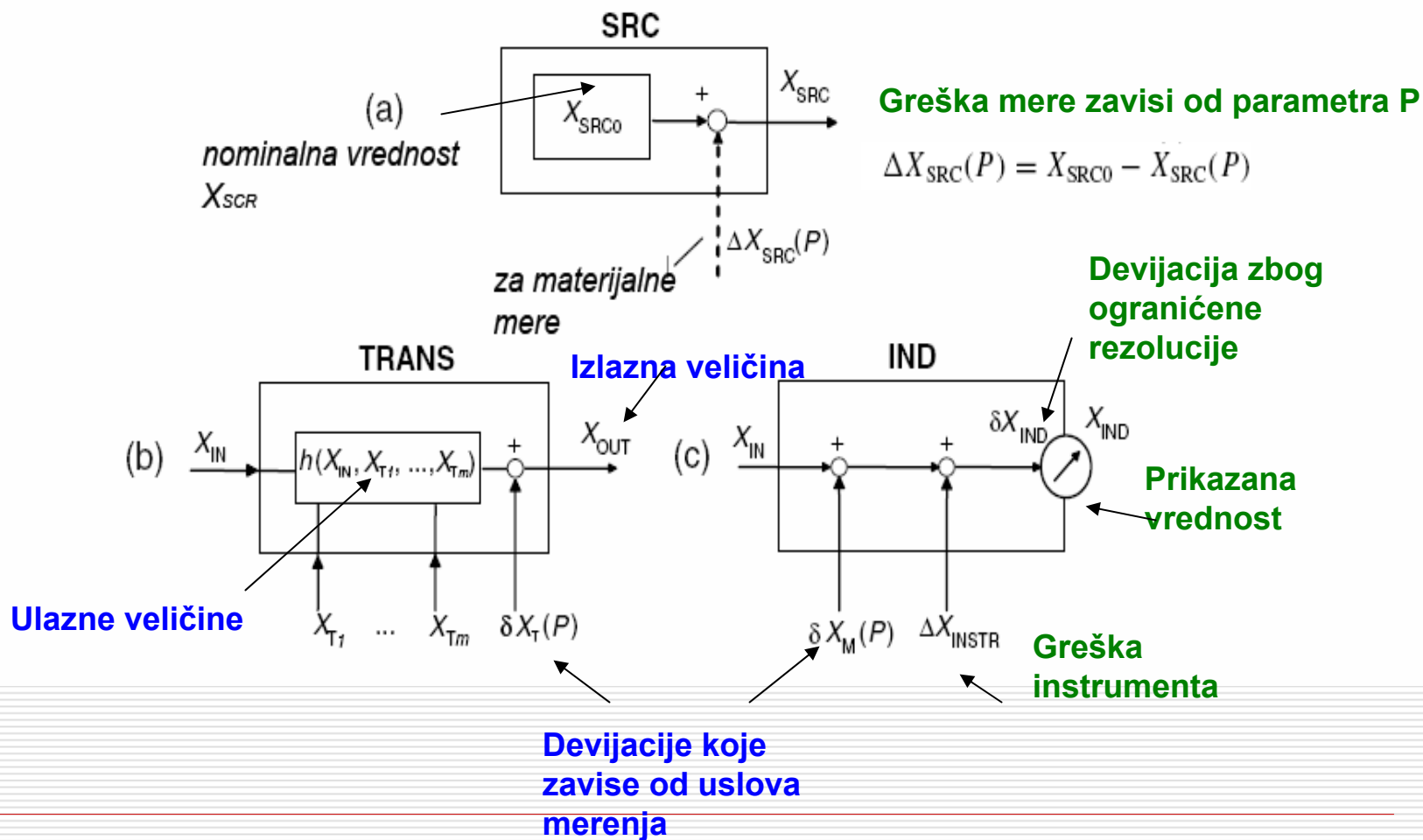
Šematski prikaz modela uzrok-efekat za procenu merne nesigurnosti



Standarde komponente modelovanja

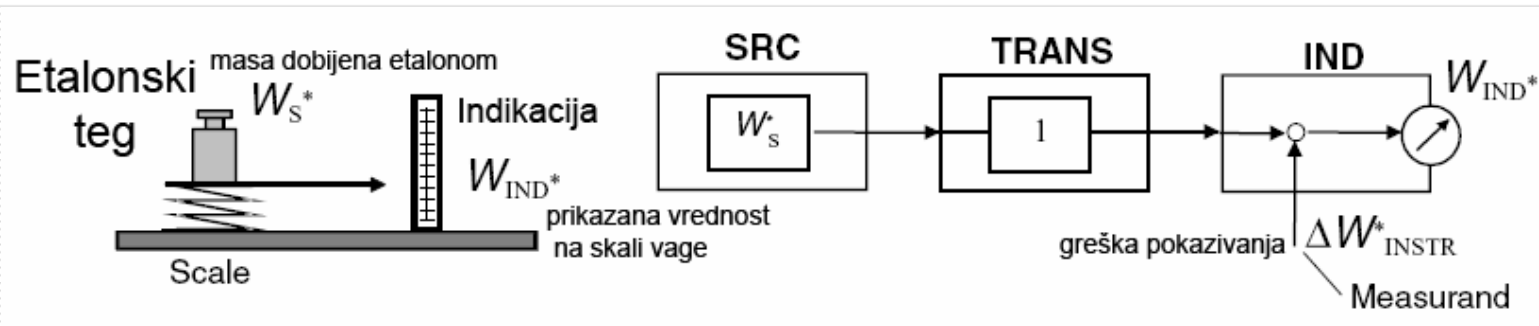
1. **Izvori parametara (SRC):**
reprodukuju merenu veličinu tj, measurand
2. **Jedinice transmisije (TRANS):**
predstavljaju procesiranje bilo kog signala i uticajne veličine
3. **Jedinice indikacije (IND)** prikaz inputa, tj. fizičke veličine koja se meri. Obično je ukupna greška pokazivanja merila ΔX_{INSTR} locirana u ovoj jedinici.

Grafički prikaz komponenti modela



Modelovanje etaloniranja vage

- Pojednostavljen primer fiktivne idealne kalibracije vage pomoću etalonskog tega



Korak (3) Matematička prezentacija uzrok-efekat odnosa za realno merenje

$$W_{\text{IND}} = (W_{\text{SO}} - \Delta W_{\text{S}})k_{\text{B}} + \delta W_{\text{CPL}}(P) + \delta W_{\text{M}}(t_a) + \Delta W_{\text{INSTR}} + \delta W_{\text{IND}}$$

Prikazana vrednost (purple arrow pointing to W_{IND})

Vrednost etalona (red arrow pointing to W_{SO})

Devijacija u spoju teg-vaga (greška kuplovanja) (red arrow pointing to $\delta W_{\text{CPL}}(P)$)

Merna nesigurnost nominalne vrednosti etalona (green arrow pointing to ΔW_{S})

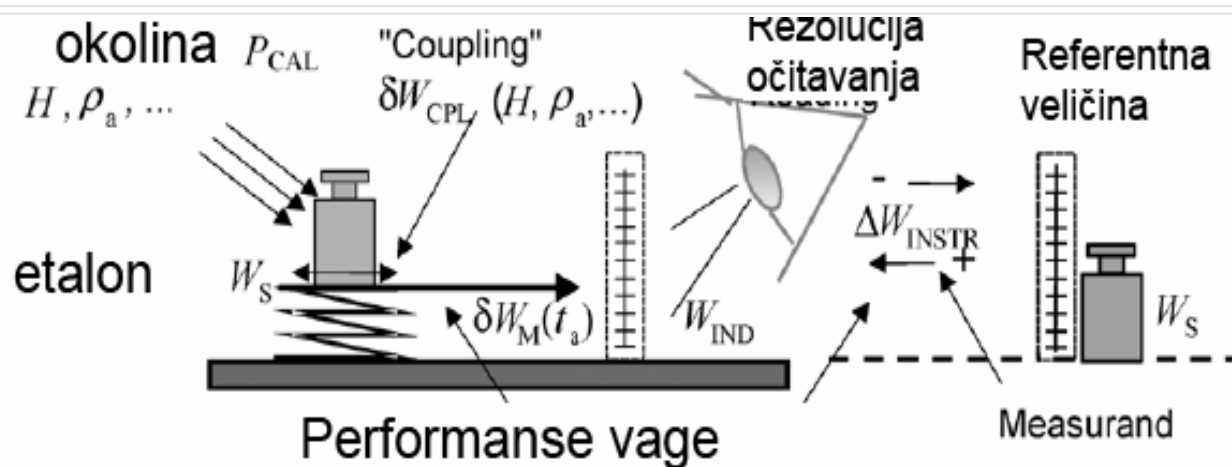
Korekcija za postojanje vazduha na spoju teg-vaga (purple arrow pointing to k_{B})

Devijacija skale usled uticaja ambijentne temperature t_a (blue arrow pointing to $\delta W_{\text{M}}(t_a)$)

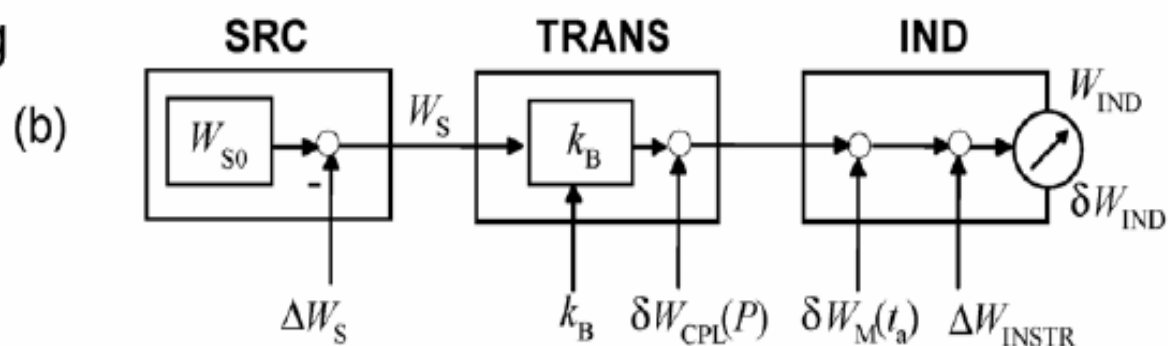
Devijacija skale (red arrow pointing to ΔW_{INSTR})

Devijacija usled konačne rezolucije očitavanja (orange arrow pointing to δW_{IND})

Pojednostavljen
primer
etaloniranja
skale



Model realnog
merjenja



$$k_B = (1 - \rho_a \rho_x^{-1}) / (1 - \rho_{1,2} \rho_{8000}^{-1})$$

Primer kvantitativne evaluacije ulaznih veličina u skladu sa ISO-GUM pri proceni merne nesigurnosti tipa B pri kalibraciji skale

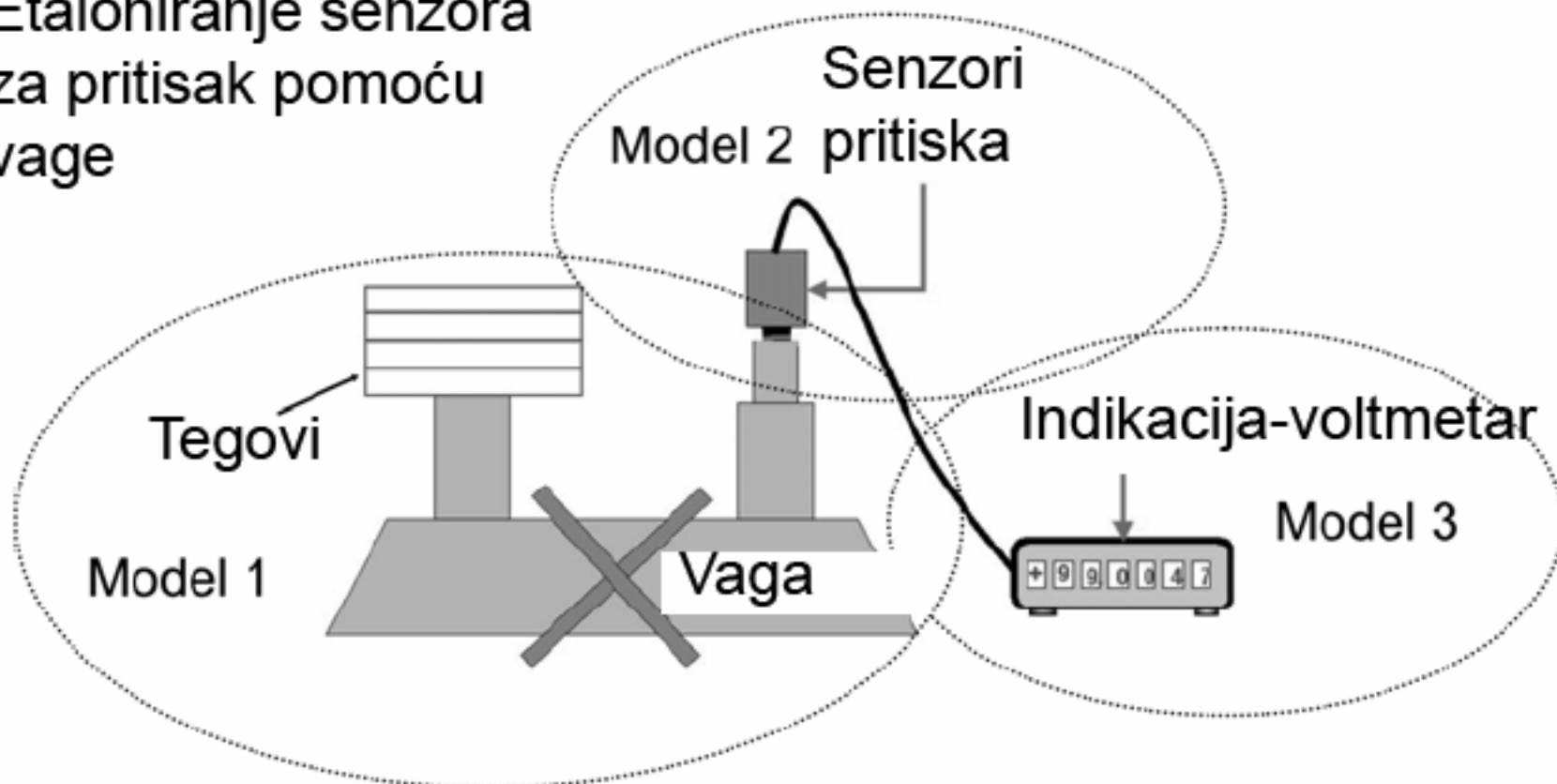
<u>Velicina</u>	<u>Poznato</u>	<u>PDF</u>	<u>Očekivana vrednost</u>	<u>Standardna merna nesigurnost</u>
W_{IND}	Digitalno pokazivanje pojedinačnog rezultata: 9998,8 g	Konstantna vrednost	9998,8 g	0 g
δW_{IND}	Rezolucija: 0,1 g	Pravougaona	0 g	0,029 g
W_{SO}	Nominalna vrednost etalona	Konstantna vrednost	10000 g	0 g
ΔW_S	Greška nominalne vrednosti etalona iz kalibracionog sertifikata	Gausova	0,001 g	0,020 g
k_B	Korekcija za postoajnje vazduha $\rho_{air} \in [1.1 \text{ kg m}^{-3}, 1.2 \text{ kg m}^{-3}]$ $\rho_{weight} \in [7800 \text{ kg m}^{-3}, 8000 \text{ kg m}^{-3}]$	Pravougaona	0.999 8543	0.000 0047
$\delta W_{CPL}(P)$	Nesavršenost spoja max. devijacija $P_0 \text{ EN 45501} \pm 0,2 \text{ g}$	Pravougaona	0	0,115 g
$\delta W_M(t_0)$	Max. devijacija ambijentne temperature $\pm 4 \text{ }^\circ\text{C} \pm 0,02 \text{ g}$	Pravougaona	0	0,012 g

Podmodeli

Kod kompleksnih modela preporučuje se razbijanje na funkcionalne celine i formiranje podmodele.

Etaloniranje senzora

Etaloniranje senzora
za pritisak pomoću
vage



Funkcija modela f

- Merena veličina (measurand):
- veličina koja je predmet merenja
- **Izlazna veličina Y koja**
 - zavisi od niza **ulaznih veličina**
 X_i ($i = 1, 2, \dots, N$) kao
- - funkcija $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)^T$

Funkcija modela

- predstavlja proceduru merenja i metode evaluacije
- opisuje kako je vrednost izlazne veličine Y dobijena iz ulaznih veličina X_i
- ima analitički izraz,
- može predstavljati i grupu izraza koji sadrže korekcije i korekzione faktore za sistematske efekte
- može se odrediti i eksperimentalno ili numeričkim eksperimentom.

Kategorije ulaznih veličina X_i :

- Direktno određene merenjem
- Uzete iz spoljašnjih izvora
(etaloniranje, sertifikovani referentni materijali, literaturni podaci)

Oblici funkcije modela

Suma ulaznih veličina

Koeficijent
osetljivosti

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i$$

Procenjena izlazna veličina

$$y = \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

**Kvadrat standardne merne
nesigurnosti pridružene y**

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i)$$

Proizvod ulaznih veličina

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i}$$

Procenjena izlazna veličina

$$y = c \prod_{i=1}^N x_i^{p_i}$$

Ako uvedemo zamene:

$$w(y) = u(y)/|y| \quad w(x_i) = u(x_i)/|x_i|$$

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i)$$

Korelacija u modelovanju

Izvori korelacije

Koeficijent korelacije je ***Kovarijansa dve ulazne veličine*** podeljena ***kvadratnim korenom njihove varijanse***

Korelacija postoji kada obe zavise od najmanje jedne veličine.

U praksi su ulazne veličine često korelisane.

Koeficijent korelacije *karacteriše* Stepen korelacije

Ukoliko dve ulazne veličine X_i / X_k na bilo koji način zavise jedna od druge **kovarijansa** pridružena procenjenim vrednostima x_i / x_k ima oblik

$$u(x_i, x_k) = u(x_i)u(x_k)r(x_i, x_k) \quad (i \neq k)$$

i dodatno doprinosi mernoj nesigurnosti

Koeficijent korelacije karacteriše Stepen korelacije

$$r(x_i, x_k)$$

Uz uslove:

$$i \neq k$$

$$|r| \leq 1$$

PRETP:

n nezavisnih parova simultano ponovljenih merenja
dve veličine P i Q

Kovarijansa pridružena aritmetičkim sredinama p i q

Iz jk

$$s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (p_j - \bar{p})(q_j - \bar{q})$$

Iz jednačine za u izračunava se r

■ Za uticajne veličine bilo kog stepena korelacije (iskustvo):
jednačina

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$$

postaje

c_i i c_k koeficijenti osetljivosti

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N c_i c_k u(x_i, x_k)$$

uz

$$u_i(y) = c_i u(x_i)$$

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N u_i(y) u_k(y) r(x_i, x_k)$$

Može da ima
negativan
predznak

U praksi ulazne veličine su najčešće korelisane pošto se za njihovu evaluaciju koriste:

- isti etaloni**
- ista merila**
- referentni datum**
- metode merenja**
- fizičke konstante**

PRETP: ulazne veličine X_1 i X_2 procenjene pomoću x_1 x_2 zavise od seta nezavisnih varijabli Q_l ($l = 1, 2, \dots, L$)

$$X_1 = g_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$$

$$X_2 = g_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$$

NAPOMENA: neke od ovih varijabli ne moraju obavezno da se pojave u obe funkcije.

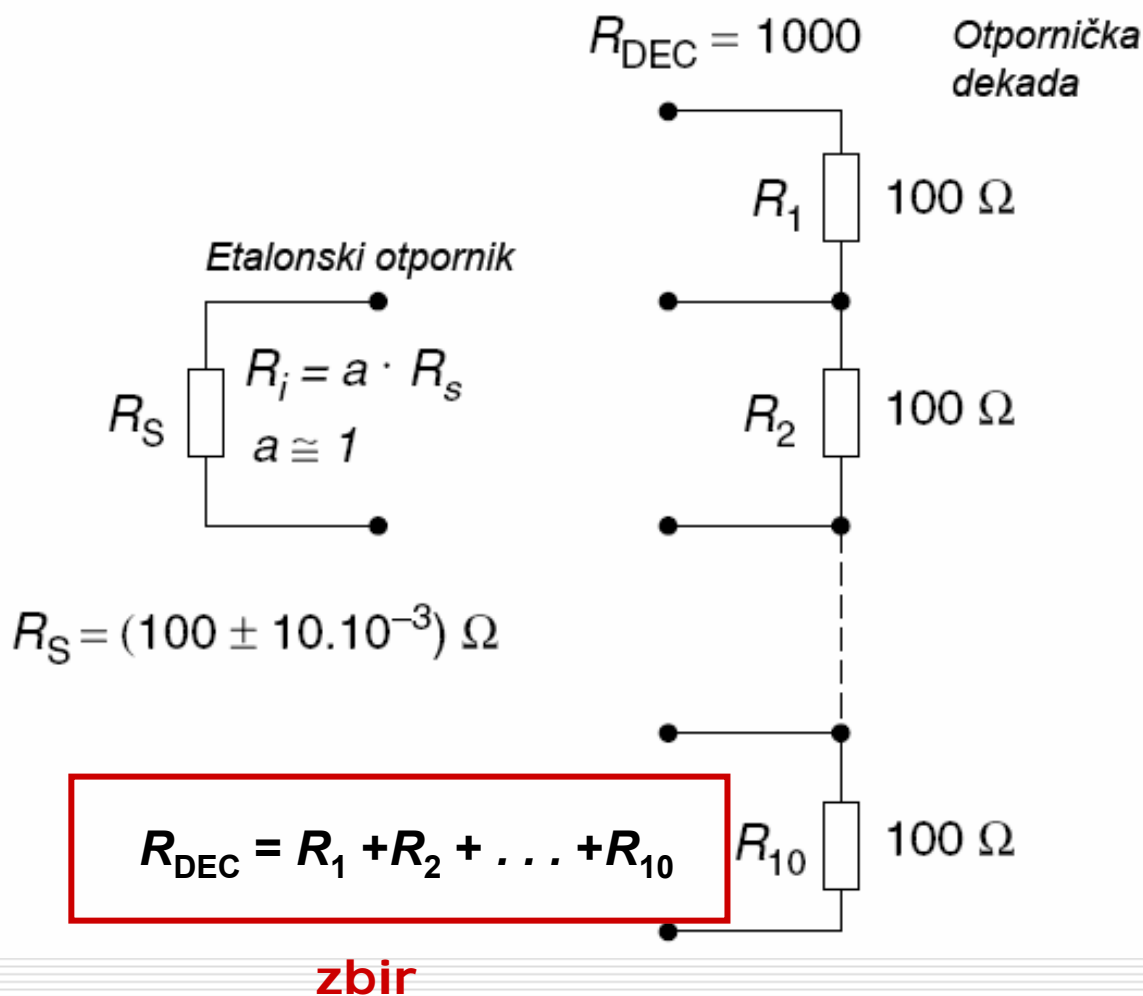
Na isti način je formirana zavisnost procenjenih vrednosti x_1 i x_2

$$q_l \quad (l = 1, 2, \dots, L)$$

Kovarijansa ima oblik

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^L c_{1l} c_{2l} u^2(q_l)$$

Kalibracija otporniće dekade etalonskim otpornicima



Parcijalne otpornosti otporniće dekade se smatraju korelisanim i tretiraju se kao posebni elementi $R_1 \dots R_{10}$ kojima se pridružuju individualne očekivane vrednosti i merne nesigurnosti

Efekti korelacije

U slučaju kada su korelisane veličine **istog znaka** korelacija dovodi do povećanja ukupne merne nesigurnosti
Za dve korelisane veličine X_1 i X_2

$$[u_{x1}^2 + u_{x2}^2]^{1/2} \leq u_{xTOTAL} \leq u_{x1} + u_{x2}$$

Ako su korelisane veličine **različitog znaka** korelacija dovodi do smanjenja merne nesigurnosti čak i do potpune eliminacije

$$0 \leq u_{xTOTAL} \leq [u_{x1}^2 + u_{x2}^2]^{1/2}.$$

Koeficijent osetljivosti

$$u_i(y) = |c_i| u(x_i) \quad i = 1, \dots, N$$

Merna nesigurnost pridružena merenoj veličini

Koeficijent osetljivosti

Standardna merna nesigurnost pridružena i-toj ulaznoj veličini koja doprinosi $u(y)$

Koeficijent osetljivosti: predstavlja parcijalni izvod funkcije koja opisuje model merenja (f) u odnosu na X_i za *procenjenu ulaznu* x_i

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_1=x_1 \dots X_N=x_N}$$

GUM uputstvo za procenu merne nesigurnosti: GUM okvir

- (i) Definirati **izlaznu veličinu** Y , tj. veličinu koja se meri;
- (ii) Doneti odluku o **ulaznim veličinama** od kojih zavisi izlazna veličina: $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$;
- (iii) Razviti **model** koji definiše odnos izlazne i ulaznih veličina: $Y = f(\mathbf{X})$;

GUM uputstvo za procenu merne nesigurnosti: GUM okvir

- (iv) Na osnovu raspoloživog znanja izabrati **funkciju raspodele verovatnoće** vrednosti X_i (probability density functions, **PDFs**, GUM klauzula C.2.5);
- (v) *Propagirati* **PDFs** za vrednosti X_i pomoću **modela** da bi se dobila **PDF** za vrednost Y_i ;

GUM uputstvo za procenu merne nesigurnosti: GUM okvir

- (vi) Koristiti PDF za vrednost Y kako bi se dobilo:
 - (a) najbolje procenjena očekivana vrednost y fizičke veličine Y ;
 - (b) standardna devijacija te vrednosti, tzv. standardna merna nesigurnost $u(y)$ pridružena vrednosti y (GUM klauzula E.3.2);
 - (c) interval (interval pokrivanja, interval obuhvata) koji sadrži vrednosti Y sa specificiranom verovatnoćom (verovatnoća pokrivanja, verovatnoća obuhvata).

GUM uputstvo za procenu merne nesigurnosti: GUM okvir

- (d) Za svaki par i, j za koji su vrednosti X_i i X_j višestruko zavisne određuje se **kovarijansa** (međusobna merna nesigurnost) $u(x_i, x_j)$ pridružena vrednostima x_i i x_j ;
- e) Izračunati koeficijent osetljivosti modela c (GUM klauzula 5.1) kao parcijalni izvod \mathbf{x} ;
- (f) Izračunati ν , efektivne stepene slobode pridružene $u(y)$, korišćenjem Welch–Satterthwaite formule;
- broj stepena slobode je
 - a) za standardnu Gausovu raspodelu ($\nu = \infty$)
 - b) za t -raspodelu ($\nu < \infty$)

GUM uputstvo za procenu merne nesigurnosti: GUM okvir

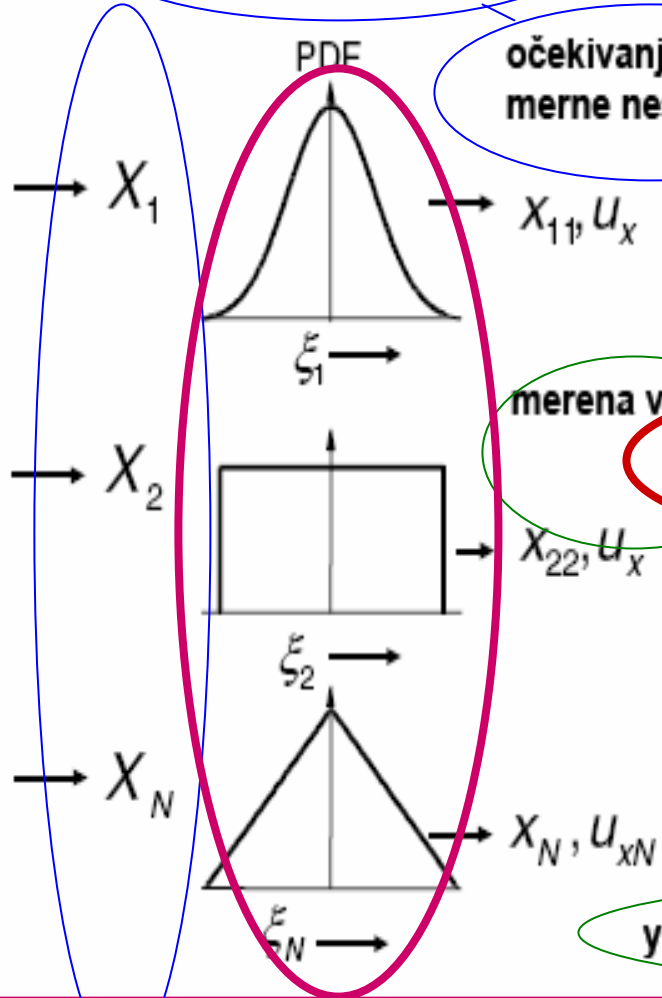
- Faze (i)–(iv) su ***FORMULACIJA***
- Faze (v) i (vi) su ***PROPAGACIJA I SUMACIJA***

Rezime ISO-GUM procedure

**P
O
Z
N
A
V
A
N
J
E**

Ulazne veličine

Izlazna veličina



očekivanja
merne nesigurnosti

očekivanje (očekivana vrednost)
merna nesigurnost

samo za linearizovane
modele

Gausova propagacija
merne nesigurnosti

merena veličina

ulazne veličine

$$y = f_M(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_{X_i}^2 + \dots}$$

proširena merna
nesigurnost

standardna
merna
nesigurnost

$y = E(Y)$ očekivana najbolje procenjena vrednost merene veličine

PRIMER GUM OKVIRA

Jonizaciona komora sa šupljinom

Merenje kerme u vazduhu

Comparison of the standards of air kerma
of the SZMDM Yugoslavia and the BIPM for ^{60}Co γ rays

by

P.J. Allisy-Roberts, D.T. Burns, C Kessler
BIPM

and

V. Spasić-Jokić
SZMDM



Uslovi merenja

- Rastojanje izvor-referentna ravan u kojoj je referentna tačka komore:
1 m
- Veličina polja: 10 cm x 10 cm
- Referentni izvor ^{60}Co , srednja energija gama zračenja: 1,25 MeV

Funkcija modela

$$\dot{K} = \frac{I}{m} \frac{W}{e} \frac{1}{1 - \bar{g}} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{a,c} \bar{S}_{c,a} \prod k_i$$

- I/m - izmerena struja jonizacije po masi vazduha u zapremini komore
- W/e - srednja energija utrošena po elektronu za proizvodnju para u suvom vazduhu
- g – udeo elektrona utrošen na proizvodnju zakočnog zračenja
- $(\mu_{en}/\rho)_{a,c}$ –odnos masenih koeficijenata apsorpcije energije u vazduhu i grafitu
- $S_{c,a}$ odnos masenih moći zaustavljanja u grafitu i vazduhu
- $\prod k_i$ – proizvod korekcionih faktora za prepoznate uticajne efekte

Karakteristike etalonske jonizacione komore

Vrsta etalona		Primarni	
Tip		ND1005/ANo.8304	
		Nominalnavrednost	
Komora	Unutrašnja elektroda, mm	19	geometrija
	Spoljašnja elektroda, mm	19	
	Unutrašnja dužina, mm	11	
	Unutrašnji prečnik, mm	11	
	Debljina zida, mm	4	
Elektrode	Prečnik, mm	2	
	Dužina, mm	10	
Zapremina	Vazдушna šupljina, cm ³	1.0126	
	Merna nesigurnost, cm ³	0.0003	
Zid komore	Materijal	Ultračist grafit	materijal
	Gustina, gcm ⁻³	1,75	
	Udeo nečistoća	$< 1.5 \times 10^{-4}$	
Primenjeni napon, V		250	napajanje

Fizičke konstante – imaju samo mernu nesigurnost tipa B

- Gustina suvog vazduha na 20 °C (literaturna vrednost)

$$\rho = 1,2930 \text{ kgm}^3, u_i = 0,01 \%$$

- $(\mu_{en}/\rho)_{a,c} = 0,9985, u_i = 0,05 \%$ (lit.)

- $s_{c,a} = 1,0009$

- $W/e = 33,97 \text{ JC}^{-1} \quad \left| \quad u_i = 0,11 \%$

- $g = 0,0032 \quad \left| \quad u_i = 0,02 \%$

- $u_{ikonstantiB} = (0,01^2 + 0,05^2 + 0,11^2 + 0,02^2)^{1/2} = 0,123 \%$

Korekzioni faktori-neki se mere, neki procenjuju, neki uzimaju iz literature

- k_s – koriguje gubitke na rekombinaciju-mere se, ima oba tipa merne nesigurnosti (900 ponovljenih merenja), srednja vrednost = 1,0021
 $S_{i(\text{tipA})} = 0,01 \%$ $u_{i(\text{tipB})} = 0,03 \%$
- k_h –koriguje gustinu vazduha u komori za vlažnost različitu od ref. 65 %, =0,9970, (literaturna vrednost) $u_{i(\text{tipB})} = 0,03 \%$
- k_{st} –rasejanje od drške komore, meri se sa fantom drškom (900 ponovljenih merenja) =0,9998, $S_{i(\text{tipA})} = 0,01 \%$ $u_{i(\text{tipB})} = 0,01 \%$

Korekcionni faktori-neki se mere, neki procenjuju, neki uzimaju iz literature (nastavak)

- k_{att} –atenuacija snopa u zidu komore (meri se)
- k_{sc} -rasejanje u zidu komore (meri se)
- k_{CEP} - nastanak sek. i terc.elektrona u zidu (referenca BIPM)
- $k_{att} \times k_{sc} \times k_{CEP}$
 $= 1,0398 \times 0,984 \times 0,9966 = 1,0196$

$$S_{i(tipA)} = 0,03 \%$$

$$U_{i(tipB)} = 0,08 \%$$

Korekzioni faktori-neki se mere, neki procenjuju, neki uzimaju iz literature (nastavak)

- k_{an} – aksijalna neuniformnost snopa
(obično se meri, ali je uzeta vrednost
iz kalibracionog sertifikata za BIPM
snop) = 0,9998, $u_{i(tipB)} = 0,10 \%$
- k_{an} – radijalna neuniformnost snopa,
meri se uvek zbog različitih veličina
komore (100 merenja) = 1,0003,
 $S_{i(tipA)} = 0,01 \%$ $u_{i(tipB)} = 0,02 \%$

Korekzioni faktori-neki se mere,
neki procenjuju, neki uzimaju iz
literature (nastavak)

□ Merna nesigurnost tipa A

□ $S_{ikorekcija} = (0,01^2 + 0,01^2 + 0,03^2 + 0,01^2)^{1/2} = 0,0346 \%$

□ Merna nesigurnost tipa B

□ $U_{ikorekcija} = (0,03^2 + 0,03^2 + 0,01^2 + 0,08^2 + 0,1^2 + 0,02^2)^{1/2} = 0,137 \%$

Izmerene vrednosti- mere se ili računaju iz izmerenih vrednosti

- Zapremina jonizacione komore: računa se iz deklaracije proizvođača

$$V = 1,0126 \text{ cm}^3 \quad S_{i(\text{tipA})} = 0,01 \% \quad U_{i(\text{tipB})} = 0,03 \%$$

- Struja jonizacije I , meri se (900 ponovljenih merenja)

- Srednja vrednost = 103,826 pA

- $S_{i(\text{tipA})} = 0,01 \% \quad U_{i(\text{tipB})} = 0,04 \%$

- $S_{\text{imerenje}} = (0,01^2 + 0,01^2)^{1/2} = 0,0141 \%$

- $U_{\text{imerenje}} = (0,03^2 + 0,04^2)^{1/2} = 0,05 \%$

Kombinovana merna nesigurnost

□ KVADRATNA SUMACIJA

$$\square s_{ci} = (0,0346^2 + 0,0141^2)^{1/2} = 0,03736 \%$$

$$\square u_{ci} = (0,123^2 + 0,137^2 + 0,05^2)^{1/2} = 0,1908 \%$$

□ KOMBINOVANA MERNA NESIGURNOST

$$u_c = (s_{ci}^2 + u_{ci}^2)^{1/2} = (0,03736^2 + 0,1908^2)^{1/2} = 0,1944$$

Proširena merna nesigurnost

□ $U = ku_c$